Istituto d'Istruzione Secondaria Superiore "M.BARTOLO"
PACHINO (SR)

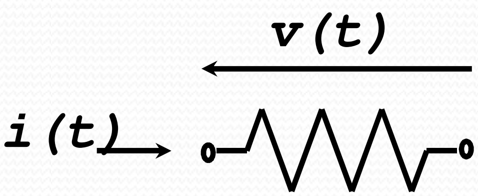
APPUNTI DI SISTEMI AUTOMATICI
3° ANNO – MODELLIZZAZIONE

A cura del Prof S. Giannitto

MODELLI MATEMATICI di SISTEMI ELEMENTARI LINEARI R, L, C

Rivediamo i concetti della scorsa lezione per i quali si è cercato di individuare la Relazione ingresso (sollecitazione) - uscita (risposta), ossia la f.d.t. ***(funzione di trasferimento)***

Resistenza elettrica



(Simbolo)

(Schema a blocchi)

$$v(t) = R \cdot i(t) \qquad [1]$$

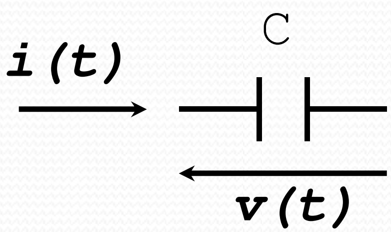
$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

(Modelli Matematici)

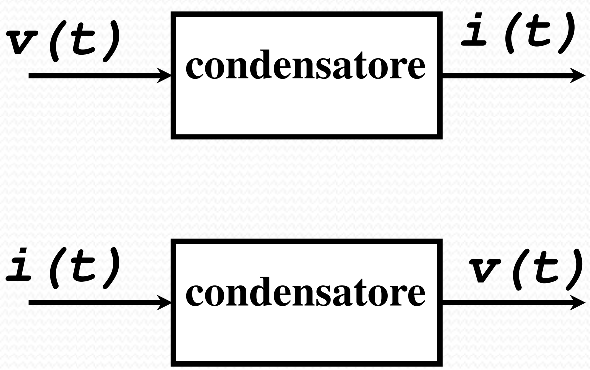
In ogni istante la tensione ai capi della resistenza è direttamente proporzionale alla corrente. (legge di Ohm)

MODELLI MATEMATICI di SISTEMI ELEMENTARI LINEARI R, L, C

Capacità elettrica



(Simbolo)



(Schema a blocchi)

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt} \qquad [2]$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt \qquad [5]$$

(Modelli Matematici)

La corrente circolante nella capacità è proporzionale alla derivata della tensione.

Dimostrazione della[2]

Ricordando che:

i(t) = dq/dt [3]

ed essendo

dq(t) = C dv(t) [4]

sostituendo la [4] nella [3] si ricava la i(t)

Da notare:

se la tensione è costante, cioè non subisce variazioni, la corrente è nulla, di conseguenza la capacità si comporta come circuito aperto

MODELLI MATEMATICI di SISTEMI ELEMENTARI LINEARI R, L, C

Dimostrazione della[5]

Dalla $i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$ **si ricava che :** $dv(t) = \frac{1}{C} \cdot i(t)dt$

integrando i due membri si ricava la v(t) $v(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt$

Da notare:

Se il condensatore è inizialmente carico occorre tener conto della tensione iniziale Vo

$$v(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt + V_o \quad [6]$$

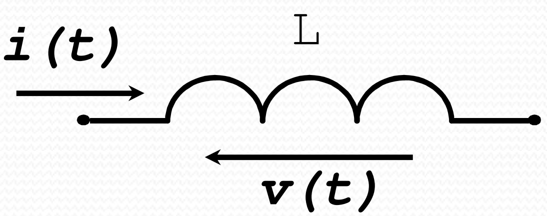
Ricordate che: $\int 5 \cdot dx = 5x$

e che la $\frac{d5x}{dx} = 5$

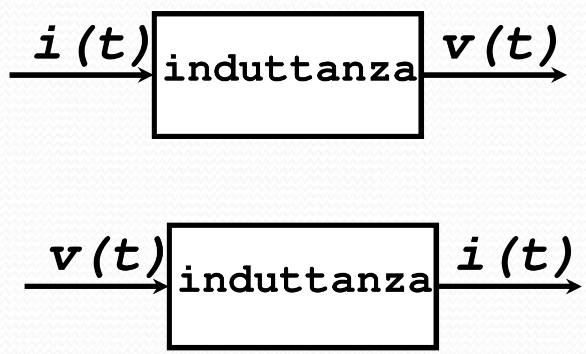
➔ $\int \frac{d5x}{dx} \cdot dx = 5x$

MODELLI MATEMATICI di SISTEMI ELEMENTARI LINEARI R, L, C

Induttanza elettromagnetica



(Simbolo)



(Schema a blocchi)

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \qquad [7]$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int v(t)dt \qquad [8]$$

(Modelli Matematici)

La tensione ai capi dell'induttanza L è proporzionale alla derivata della corrente.

Dimostrazione della [8] :

dalla [7] si ha che : $di(t) = \frac{1}{L} v(t)dt$

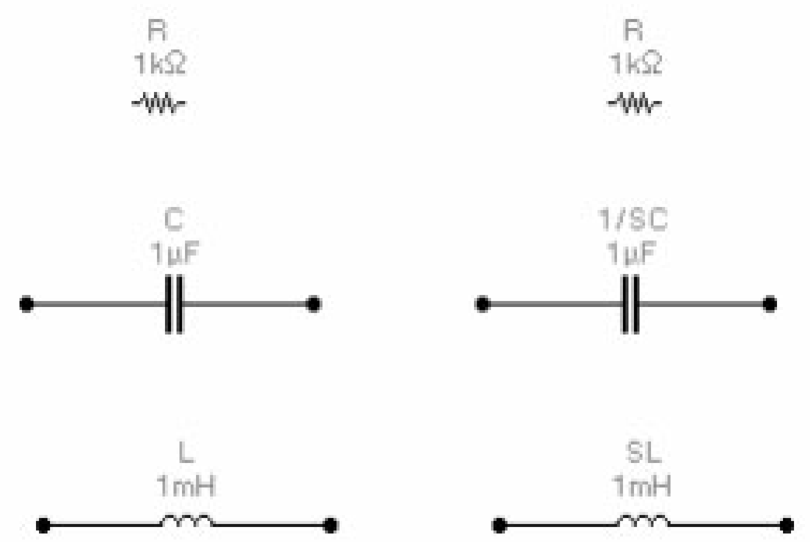
integrando i due membri si ricava la i(t)

Da notare:

se la corrente è costante, cioè non subisce variazioni, a tensione è nulla, di conseguenza l'induttanza si comporta come un cortocircuito.

MODELLI MATEMATICI di SISTEMI ELEMENTARI LINEARI R, L, C

Poi abbiamo visto che con la trasformata di Laplace possiamo utilizzare la seguente trasformazione dei componenti:



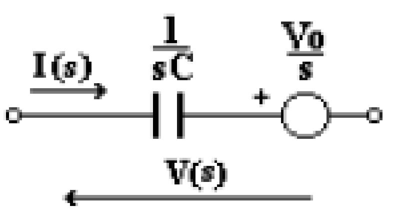
La resistenza non subisce trasformazioni : $\dfrac{V(s)}{I(s)} = \boldsymbol{R}$

La capacità si trasforma in una impedenza capacitiva di valore : $\dfrac{V(s)}{I(s)} = \dfrac{1}{s \cdot C}$

L'induttanza si trasforma in una impedenza induttiva di valore: $\dfrac{\mathrm{V(s)}}{\mathrm{I(s)}} = \mathrm{sL}$

- Se invece il condensatore inizialmente è carico alla tensione Vo:

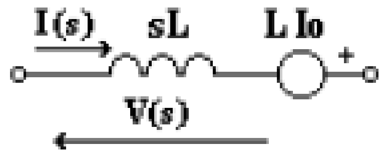
$$V(s) = \mathrm{L}\,[\mathrm{v(t)}] = \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s} + \frac{Vo}{s}$$



La capacità si trasforma in un impedenza di valore $\frac{1}{s \cdot C}$, in serie ad un generatore di tensione $\frac{Vo}{s}$

- Se invece inizialmente è percorsa da una corrente di valore Io

$$\mathrm{V(s) = L[v(t)] = sL \cdot I(s) - LIo}$$



L'induttanza si trasforma in una impedenza induttiva di valore **sL** in serie ad un generatore di tensione di valore **L Io**

Ma perché consideriamo le trasformate di Laplace?

La TRASFORMATA DI LAPLACE

Generalità

Si è visto che per determinare la risposta di un sistema nel dominio del tempo, quasi sempre, si ha a che fare con una equazione differenziale (*modello matematico*) difficile da trovare e ancora più difficile da risolvere.
Per superare, in parte, queste difficoltà si ricorre ad una trasformazione detta *Trasformata di Laplace* (LT) che semplifica sia la scrittura del modello matematico, sia il calcolo della risposta.

La trasformata di Laplace

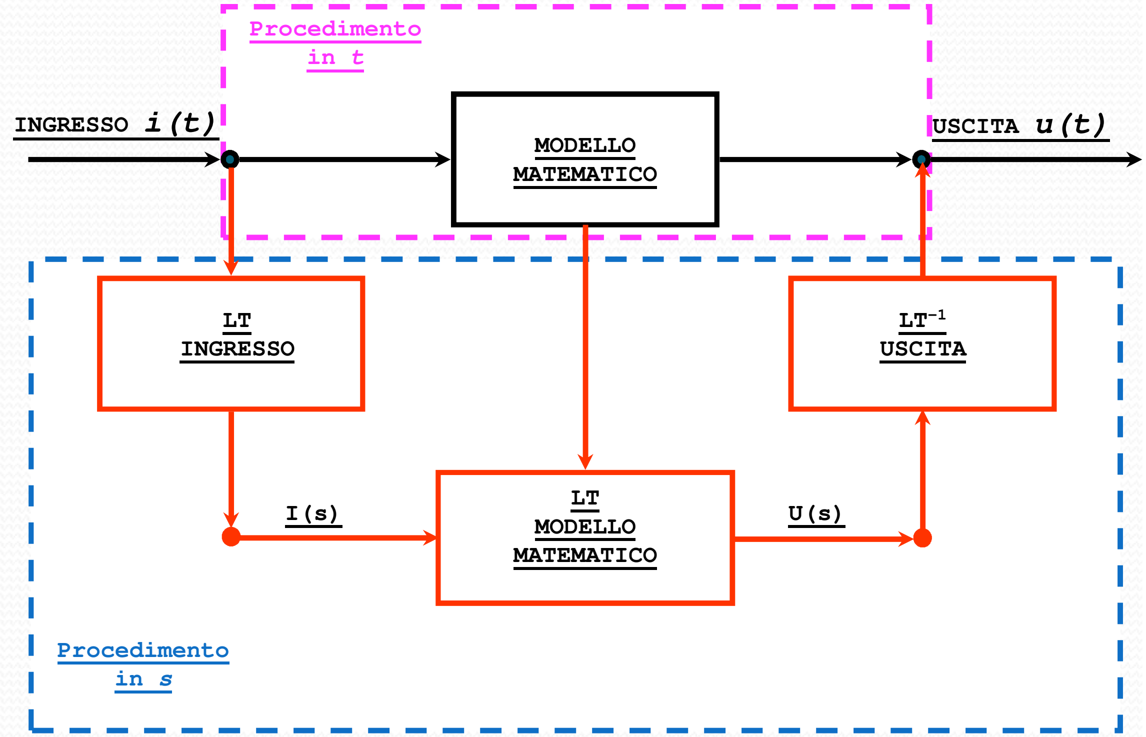
Fare la trasformata di Laplace significa passare da funzioni della variabile reale t (*tempo*) a funzioni della variabile complessa S (*frequenza*).
Attuata questa trasformazione, è più semplice trovare la risposta del sistema perché l'equazione che si ottiene è una equazione algebrica.
La risposta del sistema che si trova sarà, però, una funzione della variabile complessa s e questo non ci permette di fare un'analisi del comportamento del sistema.

Si supera questo inconveniente attuando, sulla risposta trovata, un'altra operazione di trasformazione, inversa rispetto alla prima, che si chiama ***Antitrasformata di Laplace*** **(LT^{-1})** che ci fa passare da una funzione di variabile complessa *s* a una funzione di variabile reale *t*.

Procedimento

1. **Nel dominio del tempo**
   - Si scrive il Mod. Mat. del sistema.
   - Si applica una sollecitazione in ingresso.
   - Si determina la risposta.

2. **Nel dominio della frequenza**
   - Si fa la LT[*i(t)*].
   - Si fa la LT del Mod. Mat. del sistema.
   - Si determina la risposta U(s).
   - Si fa la LT^{-1}[U(*s*)] e si trova *u(t)*.



si calcola la LT del segnale d'ingresso ?

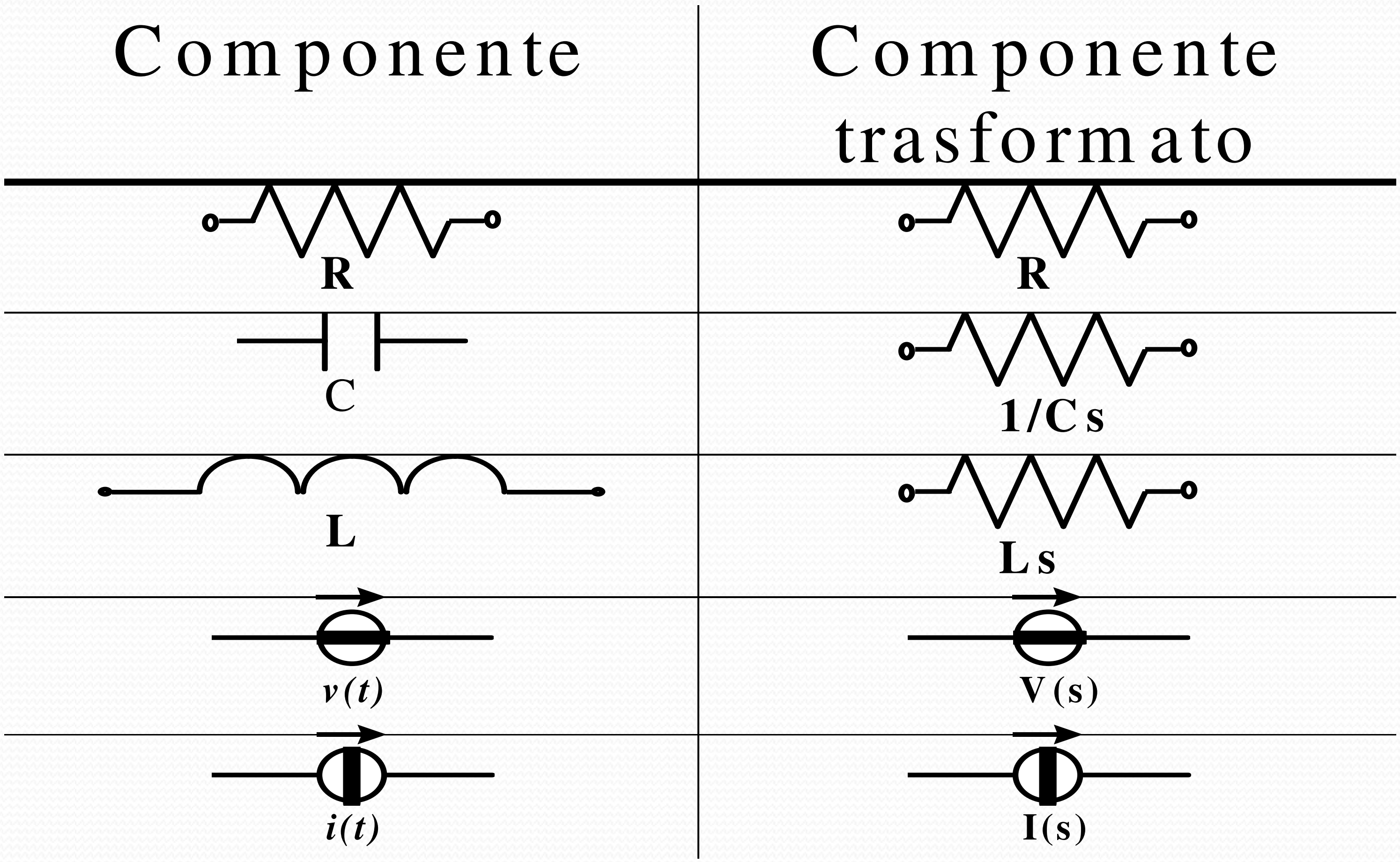
Il calcolo della LT si effettua usando una formula che non stiamo a specificare perché comporta l'utilizzo di strumenti matematici che al momento non abbiamo.
Si aggira il problema facendo ricorso a delle tabelle che ci danno immediatamente le LT delle funzioni più usate.

f(t)	F(s)
1	$\frac{1}{s}$
k	$\frac{k}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$b \cdot e^{-at}$	$\frac{b}{s+a}$
$\frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{1+\tau \cdot s}$
$\frac{a}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{a}{1+\tau \cdot s}$
$\frac{1}{a} \cdot (1-e^{-at})$	$\frac{1}{s \cdot (s+a)}$
$(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s \cdot (1+\tau \cdot s)}$

Come si calcola la LT del modello matematico del sistema ?

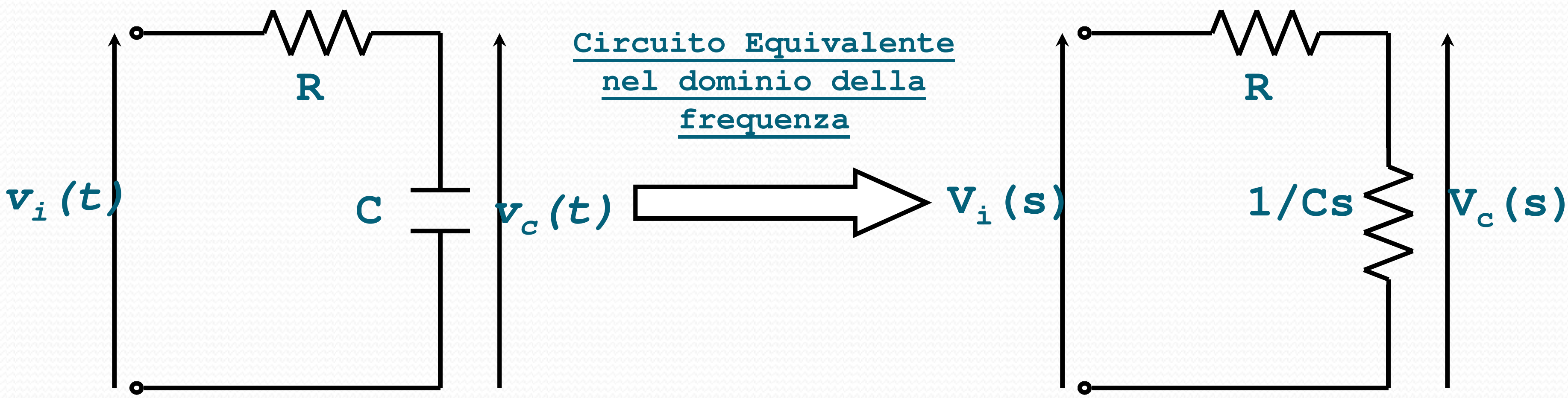
Per calcolate la LT del modello matematico occorre applicare teoremi sulle trasformate di Laplace che, al momento, non prendiamo in considerazione.

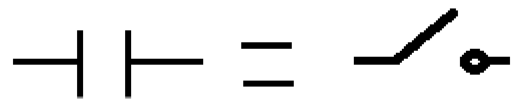
Anche in questo caso c'è il modo di aggirare il problema facendo ricorso a una tabella di trasformazione per i componenti.



Esempi FILTRO PASSA BASSO

1. Scrivere il modello matematico del seguente sistema nel dominio della frequenza.



Se f ➔ 0  Vo=Vi

Se f ➔ ∞  Vo=0

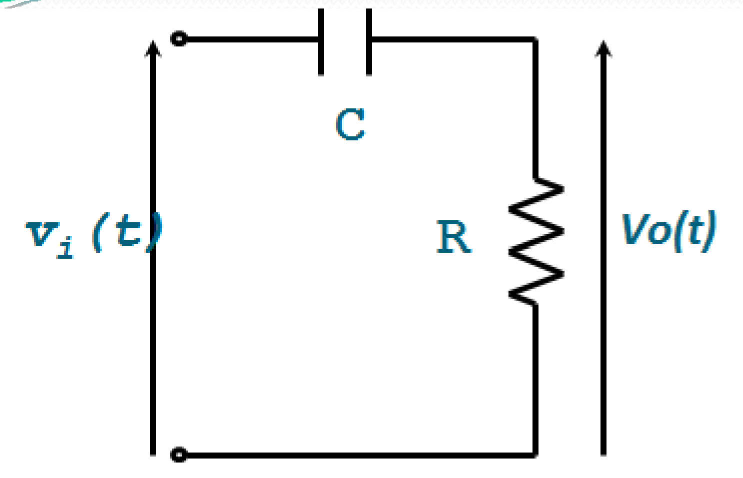
Determinazione del modello matematico:

$$V_c(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} \cdot V_i(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{RCs+1}{Cs}} \cdot V_i(s) =$$

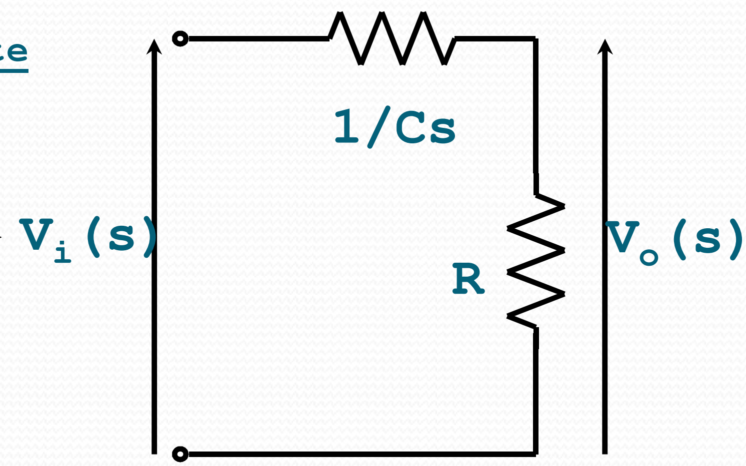
$$= \frac{1}{Cs} \cdot \frac{Cs}{RCs+1} \cdot V_i(s) = \frac{1}{RCs+1} \cdot V_i(s)$$

Esempi (FILTRO PASSA ALTO)

1. Scrivere il modello matematico del seguente sistema nel dominio della frequenza.



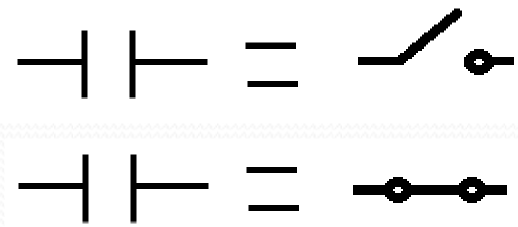
Circuito Equivalente nel dominio della frequenza



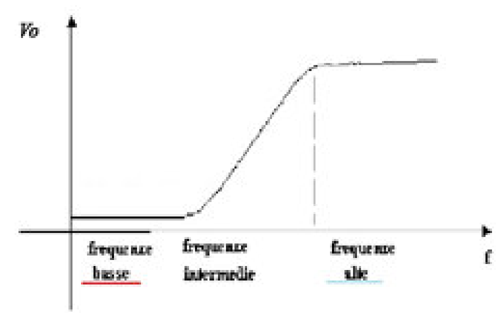
Determinazione del modello matematico:

$$V_o(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{Cs}} \cdot V_i(s) = \frac{R}{\frac{RCs+1}{Cs}} \cdot V_i(s) =$$

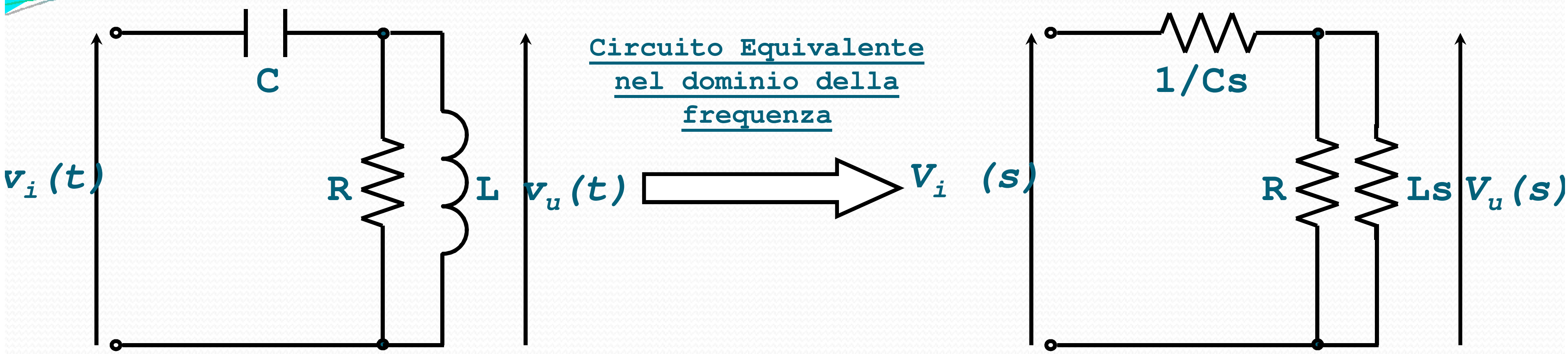
$$= \frac{RCs}{RCs+1} \cdot V_i(s)$$

Se f → 0  Vo=0

Se f → ∞ Vo=Vi



2. Scrivere il modello matematico del seguente sistema nel dominio della frequenza.



Determinazione del modello matematico:

$$V_u(s) = \frac{R \| Ls}{R \| Ls + \frac{1}{Cs}} \cdot V_i(s)$$

La Funzione di Trasferimento (F.d.T.)

Per F.d.T. si intende il rapporto tra Uscita e Ingresso nel dominio della frequenza.
Essa costituisce il Modello Matematico del sistema nel dominio della variabile complessa s.

$$F.d.T. = G(s) = \frac{U(s)}{I(s)}$$

L'importanza della F.d.T. sta soprattutto nel fatto che essa *dipende esclusivamente dalle caratteristiche del sistema e non dalla sollecitazione applicata e rimane invariata se non cambiano il punto di applicazione dell'ingresso ed il punto da cui si preleva l'uscita.*

Forma di una generica funzione di trasferimento.

$$G(s) = \frac{a_m \cdot s^m + \cdots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}{b_n \cdot s^n + \cdots + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}$$

In generale essa è costituita da un rapporto tra due polinomi ove il grado del denominatore è sempre $\geq$ del grado del numeratore ($n \geq m$).

Dal grado del denominatore si vede anche l'ordine del sistema; se:

$n = 0$ Sistema di Ordine zero;

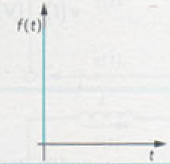
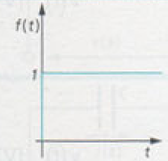
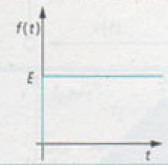
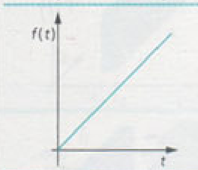
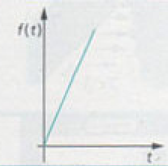
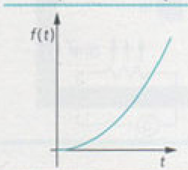
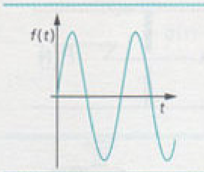
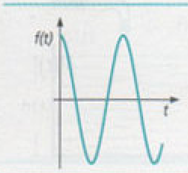
$n = 1$ Sistema del 1° Ordine;

$n = 2$ Sistema del 2° Ordine;

ecc.

Segnali canonici e loro trasformata di Laplace

Sono segnali di prova ***che vengono utilizzati nei circuiti elettrici.***

Grafici	$f(t)$	$F(s)$	Denominazione
	$f(t) = \delta(t)$	$F(s) = 1$	Funzione delta di Dirac
	$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ per } t \geq 0 \\ 0 \text{ per } t < 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{1}{s}$	Funzione a gradino di ampiezza unitaria
	$f(t) = \begin{cases} E \text{ per } t \geq 0 \\ 0 \text{ per } t < 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{E}{s}$	Funzione a gradino di ampiezza E
	$f(t) = \begin{cases} t \text{ per } t \geq 0 \\ 0 \text{ per } t < 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{1}{s^2}$	Funzione a rampa unita
	$f(t) = \begin{cases} k \cdot t \text{ per } t \geq 0 \\ 0 \text{ per } t < 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{k}{s^2}$	Funzione a rampa con coefficiente angola
	$f(t) = \begin{cases} t^2 \text{ per } t \geq 0 \\ 0 \text{ per } t < 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{2}{s^3}$	Funzione a parabola unitaria
	$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ per } t < 0 \\ \text{sen}(\omega \cdot t) \text{ per } t \geq 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	Funzione sinusoidale
	$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ per } t < 0 \\ \cos(\omega \cdot t) \text{ per } t \geq 0 \end{cases}$	$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$	Funzione cosinusoidale